MATHEMATIQUES SP TA

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.

On considère l'espace vectoriel complexe de dimension n $E = \mathbb{C}^n$ (où n est un entier naturel non nul : $n \geq 2$).
Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont des vecteurs de E,

on pose $\langle x,y \rangle = \sum_{p=1}^{n} x_p \overline{y_p}$ où $\overline{x_p}$ est le complexe conjugué de x_p ,

x et y sont dits orthogonaux si $\langle x,y \rangle = 0$.

On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n. Si T est la matrice $[t_{i,j}]_{(n,n)}$,

alors $\overline{T}$ est la matrice $[\overline{t_{i,j}}]_{(n,n)}$. On note ${}^tT$ la matrice transposée de T.

On représentera par le même symbole un élément de $L(E)$ et la matrice qui lui est associée dans la base canonique $B_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Les questions qui suivent peuvent être résolues soit directement avec les endomorphismes considérés, soit matriciellement, en utilisant la base canonique B_n.

PARTIE I

1. Montrer que la forme qui, à tout couple de vecteur (x,y) de E^2, associe $\langle x,y \rangle$ est un produit scalaire hermitien. On notera alors $\| x \| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

2. Soit T un élément de $L(E)$ tel que $\langle T(u),u \rangle = 0$ pour tout élément u de E.

2.a. En utilisant $T(e_k + e_l)$ et $T(e_k + ie_l)$ pour les éléments k et l de $\{1, 2, \ldots, n\}$, montrer que $\langle T(e_k), e_l \rangle = 0$ pour tous vecteurs e_k et e_l de B_n.
(i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$)

2.b. En déduire que T est l'endomorphisme nul de $L(E)$, (on notera $T = 0$).

3. Soit T un élément de $L(E)$. On note T^* l'élément de $L(E)$ de matrice ${}^t\overline{T}$ dans B_n. Montrer que T^* est l'unique endomorphisme de $L(E)$ vérifiant $\langle T(u),v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$, quels que soient les vecteurs u et v de E.

4. Soit T un élément de $L(E)$. T est dit <u>hermitien</u> si $T = T^*$. Une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si l'endomorphisme qu'elle représente dans B_n est hermitien.

4.a. Montrer que T est hermitien si et seulement si $\langle T(u),u \rangle$ est réel pour tout élément u de E.

4.b. En déduire que les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien sont réelles et que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour le produit scalaire hermitien considéré.

Tournez la page S.V.P.

4.c. Soit T un endomorphisme hermitien de E et soit u un vecteur propre non nul de T. On note $u^{\perp}$ l'ensemble $\{ v \in E / \langle u,v \rangle = 0 \}$. Montrer que $u^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E stable pour T.

4.d. En déduire que l'on peut trouver une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de T.

PARTIE II

1. Soit T un élément de $L(E)$. Montrer que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\| T(u) \| = \| u \|$ pour tout vecteur u de E.

(ii) $\langle T(u),T(v) \rangle = \langle u,v \rangle$ pour tout couple (u,v) de vecteurs de E

(iii) T est bijectif et $T^* = T^{-1}$.

Un endomorphisme vérifiant l'une de ces 3 propriétés est dit unitaire. Une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si l'endomorphisme qu'elle représente dans B_n est unitaire.

2. Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme unitaire sont de module 1.

3. Montrer que, si T est un endomorphisme unitaire de E, alors T transforme une base orthonormée (pour le produit scalaire considéré) en une base orthonormée. Etudier la réciproque.

4. Soit A un élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A est hermitienne, alors il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que $A = UDU^*$

5.a. Soient T_1 et T_2 deux endomorphismes de $L(E)$ diagonalisables. Montrer que si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ alors T_1 et T_2 ont au moins un vecteur propre non nul en commun.

5.b. En déduire que, A_1 et A_2 étant deux matrices hermitiennes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, A_1 et A_2 commutent si et seulement s'il existe une matrice unitaire U telle que U^*A_1U et U^*A_2U soient diagonales.

PARTIE III

Soit A la matrice réelle d'ordre 4 définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Soit T = iA, montrer que T est une matrice hermitienne de $\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$.

2.a. T représentant aussi l'endomorphisme de matrice iA dans B_4, montrer que T est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de la forme $(u, \bar{u}, v, \bar{v})$.

2.b. Soient W_1, W_2, W_3, W_4 les quatre vecteurs définis par :

$$W_1 = \frac{u + \bar{u}}{\sqrt{2}} \; ; \; W_2 = i\,\frac{(u - \bar{u})}{\sqrt{2}} \; ; \; W_3 = \frac{v + \bar{v}}{\sqrt{2}} \; ; \; W_4 = i\,\frac{(v - \bar{v})}{\sqrt{2}}$$

Montrer que (W_1, W_2, W_3, W_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ et que la matrice de f dans cette base est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

où α et β sont des réels à déterminer.

3. Application : déterminer les applications : $t \longrightarrow V(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$, de classe C^1, et satisfaisant à :

$$\frac{dV}{dt}(t) = A \cdot V(t) \text{ et } V(0) = (0, 1, 0, -1).$$

A étant la matrice définie au début de cette partie.